UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 A

Nombre: ____________________________________

Carnet: ________________ Sección: ______

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que: $\underset{x\to 1}{Lim} f(x)=3 \quad y \quad \underset{x\to 1}{Lim} g(x)=-8$ Indicando las propiedades utilizadas, hallar el valor de a para que: $\underset{x\to 1}{Lim}\dfrac{af(x)}{f(x)+g(x)}=3$	b) Definir formalmente $\underset{x\to -1}{Lim}\dfrac{x^2-3}{x+2}=-2$
c) Dibujar una función f con dominio $[-2,2]$, $f(-2)=f(-1)=f(1)=f(2)=1$, discontinua en -1 y en 1, continua a la derecha en -1 y por la izquierda en 1.	
d) Hallar $\underset{x\to +\infty}{Lim}\dfrac{x^2+1}{3x^2-2}$	e) Sabiendo que $3x-3<f(x)<x^2-x+1$, para $x\neq 2$. Hallar $\underset{x\to 2}{Lim} f(x)$

(1 Pto c/u)

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{\cos(x)-1}{sen(x)}$ (3 Ptos)	b) $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$, con $a>0$, $b>0$ (4 Ptos)
c) $\underset{x\to 3}{Lim}\dfrac{sen(2x-6)}{x-3}$ (3 Ptos)	d) $\underset{x\to -\infty}{Lim}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$ (4 Ptos)

3. Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\leq 1 \\ ax+b & si \quad 1<x\leq 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$ (6 Ptos)

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio. (2 Ptos)

b) Probar que existe un $c\in(2,3)$, tal que: $f(c)=5$, donde

$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t+\cos(t)}{t-3} & si \quad t<1 \\ t^3-2t^2+2 & si \quad t\geq 1 \end{cases}$ (3 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 A

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3 \quad y \quad \lim_{x\to 1} g(x) = -8$$

Indicando las propiedades utilizadas, hallar el valor de a para que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{af(x)}{f(x)+g(x)} = 3$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{af(x)}{f(x)+g(x)} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\left(\lim_{x\to 5} f(x)\right)}{\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right) + \lim_{x\to 5} g(x)} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a}{3-8} = 3 \Leftrightarrow a = -5$$

b) Definir formalmente

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3}{x+2} = -2$$

Solución:

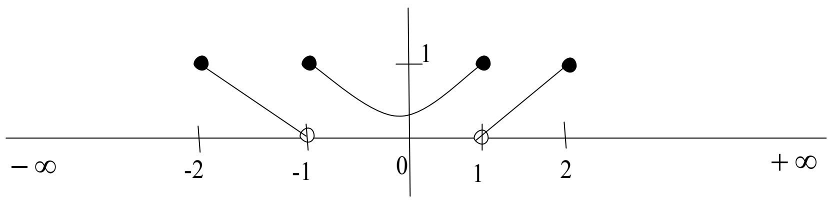
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, talque:$

$$0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2-3}{x+2} + 2 \right| < \varepsilon$$

(1 Pto c/u)

c) Dibujar una función f con dominio $[-2,2]$, $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$, discontinua en -1 y en 1, continua a la derecha en -1 y por la izquierda en 1.

Solución:



Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 A

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

d) Hallar $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-2}$

Solución:

$$\frac{x^2+1}{3x^2-2}=\frac{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{\left(\frac{3x^2-2}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-2}==\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{3}$$

e) Sabiendo que $3x-3<f(x)<x^2-x+1$, para $x\neq 2$.

Hallar $\lim_{x\to 2} f(x)$

Solución:

Como $\lim_{x\to 2}(3x-3)=3=\lim_{x\to 2}(x^2-x+1)$, entonces por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to 2} f(x)=3$$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\frac{\cos(x)-1}{sen(x)}$$
$$=\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{sen(x)(\cos(x)+1)}$$
$$=\frac{\cos^2(x)-1}{sen(x)(\cos(x)+1)}$$
$$=\frac{-sen^2(x)}{sen(x)(\cos(x)+1)}$$
$$=-\frac{sen(x)}{(\cos(x)+1)}$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$, con $a>0$, $b>0$ (4 Ptos)

Solución:

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)}\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)}\frac{\left(\sqrt{x^2+b^2}+b\right)}{\left(\sqrt{x^2+b^2}+b\right)}$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 A

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

<table>
<tr>
<td>
Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{sen(x)}{(\cos(x)+1)}\right)$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{(\cos(x)+1)}=-\frac{0}{2}=0$$
</td>
<td>

$$=\frac{\left(x^2+a^2-a^2\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+b\right)}{\left(x^2+b^2-b^2\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}=\frac{b}{a}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
c) $\lim_{x\to 3}\frac{sen(2x-6)}{x-3}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\frac{sen(2x-6)}{x-3}=2\frac{sen(2x-6)}{2x-6}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 3}\frac{sen(2x-6)}{x-3}$$

$$=2\lim_{x\to 3}\frac{sen(2x-6)}{2x-6}$$

$$=2\lim_{y\to 0}\frac{sen(y)}{y}=2\ .\ 1=2$$
</td>
<td>
d) $\lim_{x\to -\infty}\frac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$ (4 Ptos)

Solución:

$$\frac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}=\frac{\frac{(1-x)}{x}\frac{(2+x)}{x}}{\frac{(1+2x)}{x}\frac{(2-3x)}{x}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\left(\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{2}{x}-3\right)}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\left(\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{2}{x}-3\right)}=\frac{(-1)\ .\ 1}{2\ .\ (-3)}=\frac{1}{6}$$
</td>
</tr>
</table>

3. Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad 1<x\le 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$ (6 Ptos)

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

Solución:

3.1.- f es continua en $(-\infty,1)$, ya que es un polinomio.
f es continua en $(1,3)$, ya que es un polinomio.

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

f es continua en $(3,+\infty)$, ya que es el cociente de funciones continuas y la función del denominador no se anula en $(3,+\infty)$.

3.2.- Continuidad en $x=1$, $\left(\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)\right)$

3.2.1.- $f(1)=1^2+2=3$

3.2.2.- $\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2+2\right) = 3$

y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax+b) = a+b$,

Luego el limite existe si se satisface: $3=a+b$

Por lo tanto f es continua en $x=1$, si se satisface: $a+b=3=f(1)$

3.3.- Continuidad en $x=3$, $\left(\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)\right)$

3.3.1.- $f(3)=3a+b$

3.3.2.- $\lim_{x\to 3} f(x)$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (ax+b) = 3a+b$

y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-2}\right) = -1$

Luego el limite existe si se satisface: $f(3)=3a+b=-1$

Por lo tanto f es continua en $x=1$ y $x=3$, si se satisface:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ a=-2 \end{cases}$$

f es continua en todo $\mathbb{R}$, si se toman los valores $a=-2$ y $b=5$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio.

Solución:

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea un w un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c\in(a,b)$, talque: $f(c)=w$ (2 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 130 A

Nombre: ___________________________________

Carnet: ________________ Sección: ______

b) Probar que existe un $c \in (2,3)$, tal que: $f(c) = 5$, donde
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t + \cos(t)}{t - 3} & si \quad t < 1 \\ t^3 - 2t^2 + 2 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$
(3 Ptos)

Solución:
$f(2) = 2$ y $f(3) = 11$, como $f(2) < 5 < f(3)$ y la función es continua en $[2,3]$, ya que es un polinomio en ese intervalo, se puede aplicar el teorema del valor intermedios y en consecuencia, existe un $c \in (2,3)$, talque: $f(c) = 5$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado